Záverom

Kým človek žije, je každý koniec začiatkom.

Naše doterajšie uvažovanie zhrnieme v stručnom závere.

Naše snahy o definovanie funktorov trojhodnotovej logiky, nás už na začiatku smerovalo k úvahám o vlastnostiach kalkulov, lebo ak sú základné logické štruktúry kalkulmi, musia mať určité spoločné vlastnosti s ešte všeobecnejšími štruktúrami ako sú logické kalkuly, teda kalkulmi.

Logika sama, ako veda patrí k najvšeobecnejším vedným disciplínam a je preto pomocnou vednou disciplínou pre všetky vedné disciplíny, ktoré nemôžu porušovať jej pravidla a nemôžu im ani protirečiť, tak ako pravidlá a zákony prírodných vied nemôžu protirečiť zákonom fyziky.

Kalkuly

Hľadali sme dostupné definície pojmu **kalkul** a zistili sme že sú pomerne rôznorodé a nedefinujú dostatočne vlastnosti kalkulov.

Po pomerne dlhých úvahách sme našli určité riešenie, ktoré sa nám zdá byť primeranejšie k pochopeniu pojmu kalkul.

Pojem kalkul predstavuje vždy nejakú jazykovú štruktúru a to pomerne zložitú.

Musí sa skladať z troch podštruktúr.

a. Formačné pravidlá predstavujú vlastne určitú formu gramatiky pre danú kalkulovú štruktúru, pomocou, ktorej definujeme pojem **formuly** kalkulu, ktoré hovoria o vlastnostiach a vzťahoch individuí v kalkule. Tu budú patriť aj definované indivídua, vytvárané na báze individuových operátorov. Výslednom operácie individuového operátora je vznik nového individuového názvu. Za **atomárne** formuly kalkulu budeme považovať tie formuly, ktoré neobsahujú znak základného ani definovaného operátora, ale môžeme im priradiť jednu zo zvolených vlastností formuly.

Formula, ktorá obsahuje aspoň jeden formačný operátor kalkulu, je zloženou formulou kalkulu.

b. Každej formule kalkulu musíme potom priradiť aspoň dve rôzne vlastnosti a zaviesť základnú štruktúru týchto vlastností na základe nejakej zvolenej kalkulovej formačnej operácie. Výber základnej štruktúry je ľubovoľná možná štruktúra, ale jej voľba podstatným spôsobom ovplyvňuje vlastnosti budovaného kalkulu. Základná štruktúra musí umožňovať vytvorenie nejakej operácie, z ktorej opakovanou autooperáciou vznikajú nové stabilné štruktúry kalkulu, ale ich vlastnosti sú na základe autooperácii závislé na základnej štruktúre. Tieto nové štruktúry môžeme nazývať **definíciami** nových pojmov. Nové meno nazývame definiendum a druhotnú operačnú štruktúru nazývame definiens definície. Definícia je preto nové, zavedené meno, ktoré je náhradou za novú zloženú štruktúru, ktorá vznikla pomocou autooperácií zo základnej štruktúry. Takúto sústavu pomenovaných autoštruktúr budeme nazývať **definičný kalkul.**

Vytvorenie definičného kalkulu predstavuje prvé zavŕšenie činnosti pri vytváraní kalkulu.

Definičný kalkul spolu s formačnými pravidlami a individuálnymi definíciami predstavuje **bázu** kalkulu. Báza kalkulu je vždy jedna.

c. Vytváranie **deduktívnych** kalkulov predstavuje ďalšiu etapu pri vytváraní kalklulu. Vzniká tak, že si zvolíme jednu z vlastností formúl kalkulu ako základnú, nazveme ju **dedičná** vlastnosť deduktívneho kalkulu.

Pomocou základnej štruktúry vytvoríme aspoň jedno alebo niekoľko základných pravidiel, ktorých základnou funkciou je umožňovať vytvorenie pravidiel pre overovanie nových formúl kalku z toho hľadiska, či majú dedičnú vlastnosť. Pravidlá okrem toho musia mať aj ďalšiu vlastnosť a tou je zachovávanie dedičnej vlastnosti pre všetky formuly, ktoré vzniknú aplikáciou týchto pravidiel. Ak teda východzia formula bude mať dedičnú vlastnosť a pravidlá zachovávajú túto vlastnosť, potom aj výsledná formula reťazca aplikácií pravidiel bude mať dedičnú vlastnosť. Takúto postupnosť formúl, pri ktorej je výsledná formula úmyselne cielenou formulou, budeme nazývať dôkaz v danom kalkule.

Pri našich úvahách sme však dospeli k záveru, že zvolenie jednej vlastnosti ako dedičnej neuzatvára deduktívne možnosti žiadneho kalkulu. Každá z vlastností formúl, ktorá sa na formulách kalkulu vyskytuje sa môže zvoliť za dedičnú, a pri každej takejto novej voľbe dedičnej vlastnosti vzniká nový deduktívny kalkul. Keďže formuly kalkulu musia mať najmenej dve ale aj n vlastností, vzniká z každého definičného kalkulu toľko deduktívnych kalkulov, koľko vlastností môžu nadobúdať formuly kalkulu. Pretože všetky deduktívne Kalkuly vznikajú z jednej bázy, nazvali sme ich príbuzenstvom deduktívnych kalkulov.

Logické kalkuly

Ak sa zamyslíme nad problematikou skúmania vlastností logických kalkulov v celku, zistíme, že sa rozpadá do dvoch oblastí.

Prvá oblasť sa zaoberá výskumami, ktoré hľadajú priradenie nejakej pravdivostnej hodnoty skúmaným výrokom. Problematikou tohto procesu v extenzionálnej logike, teda v logike, ktorej zloženým výrokom ako celkom sa priraďuje výsledná pravdivostná hodnota závislá len a len na pravdivostných hodnotách jej komponentov, sme sa už zaoberali. Nič nebráni tomu, aby sme ako množinu možných pravdivostných hodnôt z uzavretého intervalu <1 ...0> racionálnych čísel nezvolili uzavretý ten istý interval, ale z množiny reálnych čísel. Logika by sa stala ešte všeobecnejšou, mali by sme však problémy s jej extenzionalitou, s určením jej presnej hodnoty, množina možných hodnôt logiky by sa stala nespočítateľnou.

Hodnota výroku je preto hodnotou, ktorá tvorí centrum uvažovanie o logických vlastnostiach jazyka.

Na vyjadrenie týchto procesov sme používali častice reči, ktoré sme nazvali výrokotvorné funktory. Podľa počtu voľných miest, ktoré sa v nich vyskytovali, sme ich rozdelili na jednoargumentové a dvojargumentové. Ich argumentmi, teda jazykovými výrazmi, ktoré sme mohli dosadiť na prázdne miesta funktorov, boli výroky a výsledné tvary, tiež výroky. Išlo teda výlučne o problematiku výrokovej logiky, hoci tá v podstate nepracuje s výrokmi ako takými, ale len s ich pravdivostnými hodnotami.

Zistili sme, že pravdivostné hodnoty, ktoré priraďujeme výrokom, sa líšia od seba stupňom presnosti hodnoty výroku, vyjadrenej počtom pravdivostných hodnôt logiky. Vychádzali sme z tzv. klasického princípu dvojhodnotovosti, ktorý ľubovoľnému výroku priradí jednu z dvoch prijatých hodnôt "pravda", označovali sme ju symbolom 1, a "nepravda", označovali sme ju symbolom 0. Ak sme chceli zjemniť poznanie pravdivostnej hodnoty, mohli sme v podstate ľubovoľne rozšíriť počet pravdivostných hodnôt. Tým sme prekročili zásady klasickej logiky a dostali sa na pôdu neklasických, ale extezionálnych logík. Niektoré z týchto logík sme nazvali klasickými viachodnotovými logikami.

Štruktúry pravdivostných hodnôt, ktoré nám umožňujú presne popísať vlastnosti extenzionálnych logických funktorov výrokovej logiky, sme nazvali **označené matice výrokovej logiky**.

Dvojhodnotovosť predstavuje čiernobiele nazeranie na hodnotu výrokov. Viachodnotovosť nám umožňuje zaviesť do hodnotenia výrokov pravdepodobnostný prvok. Metódy, ktoré sa zaoberajú problematikou zisťovania pravdivostných hodnôt výrokov, nazývame *rozhodovacie metódy*. Patria k nim **tabuľková** metóda a **prevod na normálne formy** formúl výrokovej logiky. Z nich nám vyplynula aj problematika vybranej hodnoty. Tabuľková metóda a prevod na normálne formy nám umožňuje rozdeliť formuly výrokovej logiky o ľubovoľnom počte pravdivostných hodnôt na formuly, v ktorých sa vyskytujú všetky možné hodnoty ako výsledné, ale aj formuly, ktoré ako výslednú hodnotu majú vždy len jednu s možných hodnôt. Formuly s takou vlastnosťou sme nazvali tautológie.

Ak si ako základný termín zvolíme vždy jeden dvojargumentový funktor, zistíme, že každý funktor môže operáciou na sebe definovať iné funktory príslušnej logiky. Tento postup sme uskutočnili na dvojhodnotovej logike a zistili sme, že vedie k usporiadaniu rôznych typov logík, ktoré sú väčšinou funkčne neúplné a podľa počtu definovaných termínov sme každému funktoru priradili jeho definičnú silu a aj možnosť, či nemožnosť vytvárať formuly s vybranou hodnotou. Vybranou hodnotou sa môže stáť ktorákoľvek možná hodnota kalkulu, ale nie všetky kalkuly budú mať každú hodnotu ako vybranú.

V dvojhodnotovej logike potom vzniknú kalkuly bez vybranej hodnoty, síce s odvodzovacími pravidlami, ale bez zákonov alebo s vybranou hodnotou 1, či vybranou hodnotou 0.

Tým sa dostávame k deduktívnej problematike, lebo *dôkaz v logike nie je len postupnosť formúl, ktorá potvrdzuje pravdivosť nejakej formuly, ale činnosť, ktorá z formuly s nejakou vybranou hodnotou odvodí vždy novú formulu s tou istou charakteristickou hodnotou.* V dvojhodnotovej logike, kde máme dve možné zvolené hodnoty, musíme potom zaviesť pojem **verratívneho** a pojem **falzitívneho** vyplývania. Niektoré neúplné kalkuly totiž nemajú inú zvolenú hodnotu okrem 0, iné len 1. V kalkuloch, kde môžu byť obe hodnoty ako vybrané, musíme prísne rozlišovať o aký druh vyplývania ide, lebo ich nemôžeme navzájom zamieňať v rámci jedného dôkazu. Uvádzame tri rôzne spôsoby vytvárania deduktívnych dôkazov, a to axiomatickú metódu, metódu prirodzenej dedukcie a metódu vytvárania smullyanovských analytických tabiel[1]. Funktory, ktoré nemôžu vytvárať formuly s vybranou hodnotou, rozlišujú medzi pravidlami pre verratívne a pre falzitívne vyplývanie. Iné funktory vytvárajú len verratívne alebo len falzitívne odvodzovacie pravidlá. Ak chceme byť dôslední, mali by sme v úplných kalkuloch pravidlá pre obe formy vyplývania formulovať jednoznačne.

Vo viachodnotových logikách potom počet rôznych foriem vyplývania rastie s počtom zvolených hodnôt, ale tým rastie aj počet možných vybraných hodnôt. Musíme si však uvedomiť, že vo viachodnotových logikách vedie objavenie akýchkoľvek dvoch rôznych vybraných hodnôt v jednom stĺpci dôkazu k sporu. Nazvali sme ho skrytý paradox.

V kalkuloch, kde sa nemôže vyskytovať viac vybraných hodnôt, nejestvuje negácia v klasickej podobe, ani možnosť nepriamych dôkazov.

Vytvoriť nepriamy dôkaz vo viac ako dvojhodnotovej logike znamená vytvoriť ho toľkokrát, koľko je možných iných vybraných hodnôt v danej logike. Vybrané hodnoty nemusia byť všetky zvolené hodnoty. Každá iná ako daná vybraná hodnota musí viesť k sporu s danou vybranou hodnotou.

Zvláštnu kapitolu sme venovali maticovej charakteristike výrokotvorných funktorov. Zistili sme, že matice sú pre výrokovú logiku veľmi užitočné a poskytujú množstvo informácií o funktoroch, ktoré sú nimi charakterizované čo do ich symetrickosti, vybranej hodnoty, schopnosti uskutočňovať rozklad formúl a pod. Rozklady formúl môžeme vytvárať nielen na báze implikácie, veď v niektorých kalkuloch sa implikácia ani nemôže vyskytovať, ale rozklad je možný na báze iných funktorov, tak že sa môžu formulovať pravidlá pre metódu prirodzenej dedukcie. Rozklad formúl určuje aj smer vyplývania. Ten je v logike nemenný podobne ako vektor času vo fyzike. Vyplývanie podľa maticovej charakteristiky funktorov má práve jeden smer. Maticové charakteristiky funktorov sú užitočné najmä vo viachodnotových logikách, pre

[1] Prvé dva spôsoby preberáme zo starších učebníc, ale metóde vytvárania analytických tabiel sa špeciálne nevenujeme, lebo v slovenčine vyšla Smullyanova práca "Logika prvého rádu", ako aj známe skriptá J. Szomolányiho "Základné logické kalkuly", kde je tento postup veľmi jasne popísaný a práce sú dostatočne známe.

nás v trojhodnotovej logike, ktorá bola hlavnou témou tejto práce. Sme si vedomí, že problémy viac naznačujeme ako riešime. Aj keď sme niektoré riešenia ponúkli, zdá sa nám že sme tým len nastolili celú sústavu nových problémov a Ich riešenie považujeme za významné pre rozvoj logiky a zároveň inšpirujúce objavenie sa nových problémov, ktorých validitu budeme schopní posúdiť až po spracovaní príslušnej sémantiky.

Zvláštnu pozornosť sme venovali a venujeme hľadaniu funktorov so shefferovskými vlastnosťami, ktoré sa vyskytujú v každej dvoj a viachodnotovej logike. V dvojhodnotovej logike sú len dva. Tieto skúmania nás viedli k zavedeniu niekoľkých typov negácií s rôznymi vlastnosťami. V dvojhodnotovej logike sa tieto problémy nevyskytli, lebo sme sa uspokojili s jednou negáciou, aj keď to tak nie je, pretože funktory V_1 a F_1 sú svojim spôsobom tiež negácie. Nazvali sme ich mononegácie a ich schopnosť negovať sa zreteľnejšie prejavuje najmä vo viachodnotových logikách. Tieto funktory menia väčšinu hodnôt na hlavnej osi voči prirodzenému usporiadaniu. Sú to negácie s pomerne vysokou definičnou silou. Okrem jedného poľa menia prirodzené usporiadanie na ostatných poliach hlavnej osi.

Na vlastnosti matíc majú podstatný vplyv aj zvolené počty hodnôt pre danú logiku. Vychádzajúc zo skúmania vlastností matíc v štvorhodnotovej logike, párne počty hodnôt aj vo viac ako štvorhodnotovej logike by mali inklinovať v určitých usporiadaniach pravdivostných hodnôt na hlavnej osi k dvojhodnotovosti. Svedčí to o mnohotvárnosti logiky, ale aj o tom, že žiadnu vednú disciplínu nemožno raz a navždy uzavrieť. Vo svojej kráse a rozmanitosti jazyk pred nami skrýva ešte mnoho potešenia z objavov a z odhaľovania jeho záhad.

Logické kalkuly predstavujú najvšeobecnejšiu kalkulovú teóriu po teórii kalkulov a ako sme už uviedli žiadna vedecká disciplína nemôže logické kalkuly ani ignorovať a ani im nemôže protirečiť. Logike nemôže protirečiť ani žiaden racionálny jazykový prejav, ak má byť zrozumiteľný.

Každá označená dvojargumentová matica výrokovej logiky, chápaná ako základná štruktúra základného logického funktora, spolu s príslušnými formačnými pravidlami pre výrokovú logiku, tvorí základ pre vytvorenie jedného logického kalkulu výrokovej logiky. Každá označená matica je schopná generovať nové štruktúry (matice), ktoré charakterizujú vlastnosti nových definovaných funktorov výrokovej logiky. Tak vzniká definičný kalkul výrokovej logiky s počtom vlastností výrokov, podľa počtu zvolených hodnôt označenia na matici.

Podľa definičných vlastností základnej matice je charakterizovaná aj vlastnosť vytvárať deduktívne kalkuly pre definičný kalkul. Príbuzných definičných kalkulov výrokovej logiky pre príslušný kalku je práve toľko ako hodnôt zvolených ako označenie matice. Hodnotou označenia môže byť ktorákoľvek hodnota z intervalu možných hodnôt výroku.

Pre výrokovú logiku sa nám zdajú byť najprijateľnejšie pravidlá smullyanovskej koncepcie pre vytváranie analytických tabiel ako formy dôkazu formúl logiky, lebo jedna skupina pravidiel nám umožňuje prevádzať dôkazy formúl pre ľubovoľnú charakteristickú hodnotu kalkulu v ktorejkoľvek n-hodnotovej logike.

Ak k nejakému kalkulu výrokovej logiky priradíme symboly všeobecného a existenčného kvantifikátora aj s príslušnou množinou štrukturálnych formačných a transformačných pravidiel pre kvantifikátory, vznikne príslušná n-hodnotová predikátová logika. Kvantifikátory totiž predstavujú operátory, na ktorých vlastnosti nemá vplyv hodnotovosť logiky. Spôsobujú však nerozhodnuteľnosť predikátovej logiky.

Zoznam použitej literatúry

(výberová bibliografia)

1. Aristoteles: První analytiky. ČSAV, Praha 1961.
2. Aristoteles: Kategórie, In: Od Aristotela po Plotina, Pravda, Bratislava 1972.
3. Berka K. Mleziva M.: Co je logika. NPL, Praha 1962.
4. Dawies P.: O čase, Motýl, Praha, 1999.
5. Einstein A.: Z mých pozdějších let, MEN, Praha 1995.
6. Einstein A.: Teorie relativity a jiné eseje. Pragma , Praha, 2000.
7. Gáher F.: Logika pre každého, IRIS, Bratislava 1994.
8. Gödel K.: Filosofické eseje, Praha 1999 (J. Fiala).
9. Hawking S.: Stručné dějiny času, .Mladá Fronta, Praha.
10. Hawking S.: Černé díry a budoucnost vesmíru, Mladá Fronta, Praha, 1995.
11. Hawking S.: Vesmír v orechovej škrupinke, Slovart, Bratislava, 2001.
12. Janák V.: Základy formální logiky, SPN, Praha 1973.
13. Mleziva M.: Neklasické logiky, Svoboda, Praha 1970.
14. Penrose R.: Makrosvét, mikrosvět a lidská mysl, Mladá Fronta, Praha, 1999.
15. Siska F.: Racionalita v optike deduktívnych postupov, In: F. Mihina, (ed.): Moderná racionalita III. FF UPJŠ, Prešov 1996.

16. Słupeczki – Borkowski. Elementy logiki matematycznej i teorii mnogosci PWN, Warszawa, 1966.
17. Smullyan R. M.: Logika prvého rádu, VTEL, Bratislava, 1979.
18. Tarski A.: Úvod do logiky a metodológie deduktívnych vied, Academia, Praha, 1966.
19. Zlatoš P.: Ani matematika si nemôže byť istá sama sebou, IRIS Bratislava, 1995.
20. Siska F.:“ Maticová logika. IRIS Bratislava, 2004.