

Dôkaz v maticovej logike

Život človeka sa nutne uzatvára, brány poznania sa však otvárajú stále a pre každého.

Všetko čo som napísal, je popisom vlastností logických faktov, ktoré som objavil. Preto moje texty nie sú polemikou s nikým.

Stať, ktorú práve uvádzame bezprostredne nadväzuje na našu monografiu „Maticová logika“. Chceme v nej poukázať na možnosti algoritimizácie prevádzania dôkazov vo výrokových logických kalkuloch vyváraných pomocou označených matíc výrokovej logiky.

Každá, ľubovoľná označená matica výrokovej logiky je základnou štruktúrou pre vytvorenie jedného výrokovologickeho kalkulu. Takúto maticu môžeme preto označiť aj ako **bázu** logického kalkulu. Ako sme už v monografii uviedli, každá označená matica predstavuje vlastne logickú štruktúru jedného výrokovologickeho funkora. (Funktor je názvom – symbolom príslušnej maticovej štruktúry.)

Funktor – matica má tri základné vlastnosti.

- schopnosť spájať dva výroky do nového zloženého výroku γ a vytvárať tak ľubovoľne dlhé, zložené výroky jeho opakovaným používaním
- schopnosť definovať nové funkory vo forme maticových štruktúr. Tuto vlastnosť sme nazvali **definičná sila matice**, ktorá predstavuje počet nových, definovaných matíc pomocou základnej matice.
- Umožňuje jednoduchým spôsobom formulovať základné odvodzovacie pravidlá pre tvorenie dôkazov.

K bodu b.:

Počet definovaných matíc, teda definičná sila matice je závislá na dvoch vlastnostiach matíc.

- Na vnútornej štruktúre matice. Niektoré matice totiž majú vlastnosť, že definujú všetky možné matice pre danú výrokovú logiku a tie sme nazvali shefferovskými maticami. Vytvárajú preto úplné výrokové logické kalkuly. Štruktúra iných ich oslabuje natoľko, že vytvárajú neúplné logické kalkuly.
- Na počte hodnôt, ktoré priradujeme jednotlivým výrokom, čím vznikajú dvojhodnotové, trojhodnotové až n-hodnotové logické kalkuly. V každej z týchto logík sa vyskytujú shefferovské aj neúplné matice. Počet shefferovských matíc so zvyšovaním počtu hodnôt pre výroky prudko stúpa.

Každú sústavu základnej matice aj jej definovaných matíc nazývame **definičný kalkul výrokovej logiky** pre príslušnú základnú maticu. *

V klasickej dvojhodnotovej logike sa vyskytujú len dve shefferovské matice nazývané Shefferov a Niccodov funktor. V trojhodnotovej logike je shefferovských matíc pomerne veľa, ako sme to už popísali v uvedenej monografii. Spôsob ako sme ich vytvárali je tam tiež dostatočne popísaný. Generovanie definícií matíc – funktorov sme v trojhodnotovej logike prevádzali na

základe vytvoreného programu pomocou počítača. Tento program môžeme považovať za algoritmus, ktorý môžeme zveriť počítaču. Tento program je uvedený na nosiči CD, ktorý je prílohou spomínanej monografie.

Generovanie definícií matíc prebieha preto na základe algoritmu.

Program na generovanie definícií pre viac ako trojhodnotové logiky je síce možné vytvoriť program, ale pre veľké definičné sily takých matíc ho súčasné počítače technicky nemôžu zvládnuť. (Pomalá rýchlosť a nedostatočné pamäte. Jediná shefferovská matica v štvorhodnotovej logike ma totiž definičnú silu 4^{16} vrátane základnej matice a každá z definovaných matíc je bázou pre jeden nový kalkul. Z týchto matíc sú mnohé tiež, inými shefferovskými maticami.) Máme však ideu čiastkových postupov, s dostatočnou mierou informácie o všetkých kalkuloch ako štvorhodnotovej tak aj viachodnotových matíc a o ich vlastnostiach pre vytváranie príslušných definičných kalkuloch.

V nasledujúcich riadkoch chceme poukázať na fakt, že vo výrokovej logike vytváranej na báze označených matíc je možné algoritmizovať aj jej dôkazy a tým prevádzať výrokovlogické dôkazy na počítačoch.

Z histórie logiky vieme, že sa v nej vyvinuli a používajú tri druhy deduktívnych postupov pri dokazovaní jej teorém.,

axiomatická deduktívna metóda

metóda prirodzenej dedukcie

konštruovanie analytických tabiel.

Z príslušných učebníc, kde sú tieto metódy popísané (J. Lukasiewicz, J. Ślupecki- L. Borkowski, R. M. Smullyan) vieme, že tieto metódy sú navzájom ekvivalentné, a preto nie je rozhodujúce, pre ktorú z nich sa rozhodneme pri vytváraní nejakej extenzionálnej výrokovej logiky.

Pre využitie označených matíc ako bazálnych štruktúr pre výstavbu extenzionálnej logiky sa podľa nášho názoru najlepšie hodí práve metóda konštruovania analytických tabiel, tak ako je popísaná v Smullyanovej monografii „Logika prvého rádu“.

Rozdiel nášho postupu spočíva len v tom, že pravidlá odvodzovania používame nie v zjednodušenej forme ako R. M. Smullyan, ale v zložitejšej forme, tak ako nám ju ponúkajú označené matice. Tento postup neuberá nič na platnosti jednotlivých pravidiel a modifikované pravidlá sú so Smullyanovskými ekvivalentné. Ich mierne zložitejšia podoba však vytvára možnosť algoritmickej prekonštrukciu príslušných analytických tabiel, ako zvláštnej formy nepriameho dôkazu.

Sullyanom uvádzané pravidlá považujeme za pravidlá uvedené v **zjednodušenej forme**. V jeho ponímaní je to opodstatnené, lebo mu umožňujú rozdeliť ich na dve základné formy:

pravidlá konjunktívneho typu

pravidlá disjunktívneho typu.

Toto delenie je v jeho ponímaní podstatné hlavne z metalogických a metodologických dôvodov.

Pravidlá, ktoré zavádzame my sú vzhľadom na ich konštrukciu pomocou matíc, v **úplnej podobe**. Ich vzťah je asi v takom vzťahu, v akom sú úplne a neúplne normálne formy.

Kým pomocou smullyanových pravidiel vytvárame v dvojhodnotovej klasickej logike analytické tably vo forme **diadických nepravidelných stromov**, pomocou úplných foriem pravidiel vytvárame analytické tably vo forme **kvadradických nepravidelných stromov**. Táto forma pravidiel nám vyhovuje viac vzhľadom na možnosti algoritmickej.

Zatiaľ ohraničíme náš záujem na vytváranie algoritmov pre dôkazy vo výrokovej logike. Algoritmizáciou dôkazu v predikátovej logike sa v tejto stati nemienime zaoberať.

K vôli jednoduchosti zvolíme najprv príklad z dvojhodnotovej klasickej logiky a ako bazálnu maticu si zvolíme Shefferov funktor (\uparrow), ktorý je charakterizovaný označenou maticou:

	↑	
p\q	1	0
1	0	1
0	1	1

Keďže uvažujeme d dvojhodnotovej klasickej logike, musíme predpokladať, že základný zložený výrok kalkulu, teda použitie základného funkтора charakterizovaného štruktúrou základnej matice môže mať priradenú hodnotu pravda (T) alebo nepravda (F) a podčiarkneme ich.

Spočítame hodnoty(1) a (0) vo vnútri matice. V pravidle budeme hodnotu 1 označovať ako T a hodnotu 0 ako F. Pretože sa hodnota 0 vyskytuje v matici trikrát, pod základnou formulou s označením T, vytvoríme tri stĺpčeky a pod formulu s označením F len jeden stĺpček.

Prvé pole vo vnútri matice s hodnotou 1 je druhým poľom matice a je priesečníkom hodnoty označenia 1 pre výrok p a pre výrok q hodnoty 0 označenia, do prvého stĺpčka do horného riadku zapíšeme T a do druhého riadku hodnotu F.

Ďalšia hodnota 1 sa nachádza v treťom poli matice a je priesečníkom hodnôt označenia pre p je to hodnota 0 a pre výrok q je to hodnota 1, preto v druhom stĺpčeky bude v prvom riadku hodnota F a v druhom riadku hodnota T.

Tretí výskyt hodnoty 1 je na jej štvrtom, poslednom políčku a hodnoty označenia sú v oboch prípadoch 0, preto do tretieho stĺpčka zapíšeme do oboch riadkov hodnotu 0.

Pole matice s hodnotou 0 je v jej prvom políčku a je priesečníkom hodnôt označenia pre oba základné výroky s hodnotou 1, preto do stĺpčka po formulu s označením F zapíšeme v oboch riadkoch hodnotu T.

Tým je vytvorený popis používania pravidla pre prevádzanie dôkazov v dvojhodnotovom klasickej logickom kalkule na baze shefferovho funkтора.

T(A↑B)				F(A↑B)		
T	F	F		T		
F	T	F		T		

Formula s označením T vytvára tri vetvy, formula s označením F vytvára jednu vetvu stromu. **Súčet vetiev pod oboma označenými predpokladmi nemôže v dvojhodnotovej presiahnuť hodnotu 4, lebo toľko je všetkých polí vo vnútri matice..**

Ak je nutné, vzhľadom na vnútornú štruktúru matice uviesť štyri vetvy, druhý označený predpoklad je paradoxom a nemôže z neho vyplývať žiaden záver (vetva). Ako príklad uvediem maticu funkтора **verum (V₂)**

p\q	1	0
1	1	1
0	1	1

Pomocou nej konštruované pravidlo pre konštrukciu tably bude mať tvar:

T(AV ₂ B)				F(AV ₂ B)
TA	TA	FA	FA	★
TB	FB	TB	FB	

Z matice nemôžeme priradiť pod formulu F(AVB) žiadnu vetvu, lebo všetky štyri vetvy boli vytvorené pomocou štyroch polí dvojhodnotovej matice verum. Vetva je uzavretá už označením F, lebo funktor „V“ hodnotu „F“ vo svojej matici neobsahuje. Je tam nutne len hodnota T. Označením F preto vzniká paradox z dvoch označení, zo štruktúry a z vytvorenia pravidla. Keďže paradox nepripúšťa použitie logických žiadnych operácií, nemôžeme pridať pod taký riadok žiadnu formulu.

. Hviezdička pod formulou znamená, že pod uvedený výraz nemôžeme zapísať buď žiadnu formulu, alebo ľubovoľnú formulu, ale to značí že z nej tak isto nevyplýva nič, a taká situácia nastáva len pri paradoxoch.

Tento fakt nás oprávňuje opraviť tvrdenie klasikov, stoikov, že: „Z nepravdy vyplýva hocičo“. Nie je to pravdivé tvrdenie. Správna formulácia by mala vyzerať nasledovne:

Z pravdy vyplýva len pravda.

Z nepravdy vyplýva len nepravda.

Z Paradoxu nevyplýva nič alebo hocičo.

Formula F(AV₂B) je preto paradoxom, lebo podľa svojej vnútornej štruktúry je vždy pravdivá a my jej označením zároveň priraďujeme aj hodnotu nepravda. Veta, ktorej sú zároveň priradené dve pravdivostné hodnoty nie je výrokom ale paradoxom, lebo aj po negácii ostáva paradoxom, aj tak jej priradíme dve hodnoty. Jej konjunkcia, disjunkcia ... nemajú jednoznačné priradenie hodnôt. Nemôžeme teda s ňou pracovať ako s výrokom. Takéto typy paradoxov sa vyskytujú ešte častejšie v trojhodnotovej a viachodnotovej logike.

Tento návod je možno pomerne jednoduchým spôsobom zovšeobecniť do podoby, aby bol schopný vytvárať odvodzovacie pravidlá pre ľubovoľnú maticu dvojhodnotovej logiky. S pomocou programátora potom môžeme vytvoriť príslušný program pre počítač, ktorý bude potom automaticky vytvárať príslušné odvodzovacie pravidlá aj pre definované matice kalkulu.

Zamyslíme sa teraz nad pojmom formula výrokovej logiky. Nebudeme zavádzať jej definíciu, predpokladáme že je všeobecne známa a prijatá. Uvedieme si ale ich vyjadrenie vo forme príslušných množín, podľa rozdelenia formúl v dvojhodnotovej logike a ukážeme na ich vzťah k dedukcii. Neskôr uvedieme takéto rozdelenie pre trojhodnotovú logiku, lebo tam rozdelenie formúl v dvojhodnotovej logike nevyhovuje.

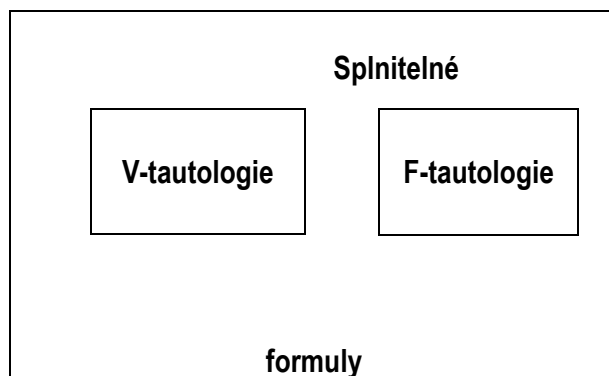
V dvojhodnotovej logike rozdeľujeme **všetky jej formuly, čiže univerzum formúl dvojhodnotovej logiky** na tri disjunktné množiny:

Veratívne tautológie (V-tautológie)

falzitívne tautológie (F-tautológie)

splniteľné formuly

Názorne to vyjadríme pomocou nasledujúceho množinového grafu.



Musíme si ale uvedomiť, že splniteľnosť formuly VL musí byť viazaná vždy na určitú, aspoň jednu zvolenú pravdivostnú hodnotu výrokového kalkulu, konkrétne tú hodnotu, ktorá je charakteristickou hodnotou daného kalkulu. Potom:

V-tautológie sú formuly VL splniteľné vždy len na pravdivostnú hodnotu pravda. Majú aj inú dôležitú vlastnosť. Každú takúto formulu môžeme považovať za samostatnú definíciu dvojargumentového funkтора verum, teda za definíciu dvojargumentovej vybranej matice pre hodnotu pravda.

F-tautológie sú formuly VL splniteľné vždy len na pravdivostnú hodnotu nepravda. Každú z týchto formúl môžeme považovať za samostatnú definíciu dvojargumentového funkтора falzum, teda za definíciu dvojargumentovej vybranej matice pre hodnotu nepravda.

Splniteľné formuly sa viažu svojou splniteľnosťou ako k hodnote pravda, tak aj k hodnote nepravda. Sú preto v univerze formúl dvojhodnotovej logiky všetkých splniteľných formúl doplnkom zjednotenia množín T-tautológií a F-tautológií, alebo inakšie, splniteľné formuly si túto vlastnosť zachovávajú vo veratívnom aj falzitívnom kalkule výrokovej logiky. To je aj jedným z argumentov, že každý kalkul vytvára pomocou svojho definičného kalkulu toľko príbuzných Kalkulov, koľko zvolených hodnôt sa v ňom nachádza.

Teraz sa zamyslíme nad vzťahom týchto našich záverov k formám dedukcie. Už sme naznačili, že pre maticovú logiku je najpriateľnejšie používanie deduktívnych pravidiel formou vytvárania analytických tabiel. Rovnako je však možné používať axiomatickú metódu a metódu prirodzenej dedukcie. Vzniká tu však istá technická prekážka, vyplývajúca z nášho chápania dedukcie.

Zaviedli sme pojmy **T-tautológie** a **F-tautológie** lebo podľa našich východísk, sa charakteristickou hodnotou logického kalkulu môže stáť ľubovoľná zvolená hodnota výroku. Ak potom začneme analyzovať ktorúkoľvek formulu kalkulu vytvorenú napr. na báze shefferovho funkтора, potom môžeme začať vytváraním tably na základe označenia „T“ pred skúmanou formulou. Ak vytvoríme tablu a tá bude mať všetky vetvy uzavreté, Potom skúmanú formulu môžeme zaradiť medzi F-tautológie a previedli sme deduktívny dôkaz tejto formuly. Ďalej už nemusíme analyzovať, lebo formula je jednoznačne zaradená do jednej z disjunktných množín nášho univerza, konkrétne do množiny F-tautológií. Ak však vznikne otvorená tabla, potom ju ešte nemôžeme zaradiť do žiadnej z množín, ale musíme vytvoriť novú tablu pre tú istú formulu, ale označíme ju hodnotou „F“. Ak potom vznikne uzavretá tabla, zaradíme formulu do množiny T-tautológií. Ak pri oboch označeniach vzniknú pre nejakú formulu otvorené tably, takú formulu zaradíme medzi splniteľné formuly.

Inakšie povedané.

Úvodné formuly, ktorých označenie hodnotou „F“ vedie pomocou odvodzovacích pravidiel k vytvoreniu uzavretej tably sú V-tautológie a takým postupom vytvárame veratívny výrokový kalkul.

Formuly, ktorých označenie hodnotou „T“ vedie pomocou odvodzovacích pravidiel k vytvoreniu uzavretej tably sú F-tautológie a takým spôsobom vytvárame falzitívny výrokový kalkul.

Tabla je uzavretá, ak každá vetva stromu, ktorý je formou tably je uzavretá.

Vetva stromu je uzavretá, ak sa na jej ceste od bázy k vrcholu objaví tá istá formula raz s označením „T“ a raz s označením „F“. Z formúl „TA“ a „FA“ totiž len jedna vetva môže mať charakteristickú hodnotu kalkulu. (V spôsobe zápisu, ktorý sa pri stromoch používa, je báza na hornej strane zápisu a vrchol dole.)

Formuly, pri ktorých v dvojhodnotovej logike ani jedno označenie nevedie k uzavretej table sú splniteľné.

Pri používaní smullyanovských deduktívnych postupov na vytváranie analytických tabiel, môžeme vychádzať z akejkoľvek formuly dvojhodnotovej logiky, ktorá je vytvorená pomocou matíc príslušného definičného kalkulu.

Uzavretá vetva znamená že sa ne nej objavuje jedna formula s dvoma rôznymi označeniami a to je paradox.

Znovu vysvetlíme čo sme uviedli v monografii.

Formula: $\sim(A \sim A)$ je V-tautológia, je preto vždy nutne pravdivou vetou.

Formula: $(A \sim A)$ je F-tautológia, je preto vždy nutne nepravdivou vetou.

Formula: **FTA** je paradox, preto nie je výrokom. Podľa postupnosti zápisu by mala mať zároveň dve pravdivostné hodnoty. Ak taká štruktúra existuje potom nie je pravdivá ani nepravdivá. Budeme ju preto považovať za **nesprávne utvorenú vetu**.

Z toho: **$F\sim(A \sim A)$ je paradox**

$T(A \sim A)$ je paradox.

Také výrazy musíme považovať za nesprávne vytvorené.

Nesprávne vytvorená veta nemôže byť výrokom, lebo nie je formulou VL.

Ak je preto na jednej vetve nejaká formula **A** raz označená **TA** a po tom s označením **FA** je to vlastne to isté, ako by sme to napísali v podobe **TFA**. Preto je taká vetva uzavretá a pokračovanie v nej už nemôže viesť k žiadnemu prijateľnému výsledku.

Ďalšou otázkou je, aké formuly sa môžu vyskytovať v jednotlivých formách dôkazov. Najprv preberieme jednotlivé formy pre prípad

O analytických tabľách sme už rozhodli. Východiskom konštrukcie tably môže byť ľubovoľná formula VL.

Pri použití axiomatickej formy dôkazu sa v **úplnom** kalkule situácia mení. Východiskom dôkazu sú uznané vety, zákony logiky – **axiómy** a **odvodzovacie pravidlá**. Pravidlá zachovávajú ich dedičnú vlastnosť a tou je u axióm pravdivostná hodnota. Axiómy sú však tautológiami. Ak sa zachováva dedičná vlastnosť, potom každá samostatný riadok - veta dôkazu musí byť tautológiou.

Samostatnými riadkami v axiomatickom dôkaze sú vždy

V-tautológie vo veratívnych kalkuloch a

F-tautológie vo falzitívnych kalkuloch.

Substitúciami do axióm môžu byť ľubovoľné formuly skúmaného kalkulu, lebo ľubovoľná substitúcia do tautológie vytvára znovu tautológiu.

Iná situácia nastáva pri neúplných axiomatických kalkuloch.

Bazálnymi maticami neúplných kalkuloch sú dvojargumentové matice dvojhodnotovej logiky, ktoré nie sú shefferovské. Vytvárame pomocou nich neúplné definičné kalkuly. Niektoré neúplné matice nazvali sme ich **implikačné**, však definujú jednu vybranú maticu. Patria tam matica pre:

implikáciu,

konverziu,

ekvivalenciu,

**neekvivalenciu,
neimplikáciu
nekonverziu.**

V kalkuloch, kde sú tieto matice bazálnymi maticami sa nedá definovať negácia, preto sa v nich ani **nedá prevádzať** nepriama forma dôkazu.

Prvé tri definujú vybranú maticu pre funktor verum a zbývajúce tri vybranú maticu pre funktor falzum. V prvej skupine je preto možno konštruovať V-tautológie a v druhej F-tautológie. Kalkuly tejto skupiny je preto možno budovať pomocou axiomatickej metódy. Pri použití pravidla substitúcie však musíme prísne dodržiavať definíciu formuly v príslušnom kalkule.

Ak napríklad vytvoríme implikačný kalkul, v ktorom formulu definujeme takto:

a. Každá samostatná výroková premenná je formula

b. Ak A je formula, potom $(A \rightarrow B)$ je formula.

Potom formula

$(p \rightarrow (q \rightarrow p))$ je jeho V-tautológiou, ale jej substitúcia (vlastne ani nie je substitúciou)

$(p \rightarrow ((q \quad q) \rightarrow p))$ nie je formulou skúmaného kalkulu, lebo výraz $(A \quad B)$, ani výraz

A, nie sú jeho formulami. Matice pre konjunkciu a negáciu nie sú totiž definované v implikačnom kalkule.

Výraz, ktorý nie je formulou kalkulu, nemôže byť ani jeho tautológiou. Uvedená tautológia má preto väčšiu silu v úplnom kalkule ako v kalkule neúplnom. Musíme sa preto veľmi dôsledne riadiť **možnosťami definičného kalkulu príslušnej bazálnej matice.**

Pri použití **metódy prirodzenej dedukcie** ako metódy tvorenia dôkazu vzniká tiež nová situácia. Pri týchto úvahách budeme vychádzať z je modifikácie uvedenej v publikácii Słupeckého Borkowského: „Elementy logiki matematycznej i teorii mnogosci“. Čitateľ nájde presne formulované pravidlá pre tvorenie priameho aj nepriameho dôkazu vo veratívnom kalkule výrokovej logiky práve v tejto monografii. Pravidlá pre príbuzný falzitívny sme uviedli v našej monografii (Siska F.: Maticová logika.)

Keďže dôkazy v tejto sú prevádzané na základe implikačného rozkladu formúl, jednotlivé riadky dôkazu môžu byť buď splniteľnými formulami, alebo V-tautológiami pri charakteristickej hodnote kalkulu „pravda“ vo veratívnom kalkule, alebo splniteľnými formulami a F-tautológiami pri charakteristickej hodnote kalkulu „nepravda“ v príbuznom falzitívnom kalkule. Do dôkazu môže pridávať ako nové riadky kedykoľvek príslušné tautológie. Najdôležitejšie je pritom zachovávanie príslušnej splniteľnosti formúl vzhľadom na charakteristickú hodnotu kalkulu. **Ona je dedičnou vlastnosťou kalkulu a všetky odvodzovacie pravidlá ju musia zachovávať.**

V-tautológie respektíve F-tautológie, ktoré už boli v príslušnom kalkule dokázané preto označujeme ako teorémy daného kalkulu, lebo sú vzhľadom na jeho charakteristickú hodnotu vždy splniteľné.

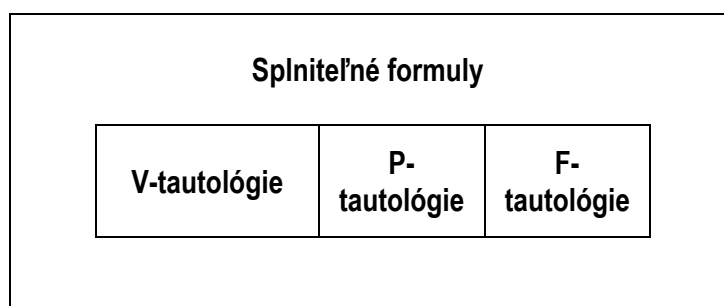
Ak sa v stĺpci dôkazu objaví formula, ktorá je vzhľadom na charakteristickú hodnotu kalkulu nespĺniteľná, ide v dvojhodnotovej logike vždy a tautológiu príbuzného kalkulu a to je signál, že sme faktický prešli do kalkulu s inou dedičnou hodnotou a v priamom dôkaze pre daný kalkul už nemôžeme pokračovať. Riešime to tak, že ako ďalší riadok dôkazu pripojíme formulu, ktorá je negáciou posledného člena implikačného rozkladu a dôkaz považujeme za nepriamy. Inkriminovanú formulu môžeme považovať za paradox, lebo nie je splniteľná na charakteristickú hodnotu kalkulu, ktorou by mala byť, jej štruktúralna hodnota ju jednoznačne charakterizuje a pri tom by podľa vlastností odvodzovacích pravidiel mala mať dedičnú – teda charakteristickú vlastnosť kalkulu. Pri nepriamom predpokladovom dôkaze metódy prirodzenej dedukcie vlastne hľadáme možnosť vytvorenia tautológie príbuzného kalkulu a jej vytvorením dokážeme, že v predpokladoch, vrátane predpokladu nepriameho dôkazu je skrytý paradox, ktorý umožňuje vytvorenie nespĺniteľnej formuly kalkulu.

Za spor v dôkaze je považujeme objavenie sa dvoch samostatných riadkov dôkazu, ktoré však môžu byť vzhľadom na charakteristickú hodnotu kalkulu obe splniteľné. Až ich spojenie pomocou konjunkcie do samostatnej formuly vytvára završenie procesu, lebo vznikne nesplniteľná formula kalkulu, ktorá má mať jeho charakteristickú hodnotu, ale je zároveň nesplniteľná a preto je už paradoxom.

Trojhodnotová logika

Prechod na viac ako dve hodnoty prináša so sebou aj určité špecifiká a potrebu spresniť doterajšie úvahy. My sa však zmeriame len na nové vlastnosti štruktúr trojhodnotovej logiky.

Grafické znázornenie rozdelenia formúl však uvedieme v zjednodušenej podobe a potom ho špecifikujeme podrobnejšie pomocou pojmového aparátu.



V-tautológie – formuly splniteľné vždy a len na pravdivostnú hodnotu pravda

P-tautológie – formuly splniteľné vždy a len na pravdivostnú hodnotu polpravda

F-tautológie – formuly splniteľné vždy a len na pravdivostnú hodnotu nepravda

Splniteľné formuly – formuly splniteľné aspoň na jednu z hodnôt pravda, polpravda a nepravda. Žiadna z týchto formúl nie je tautológiou.

Všetky tieto množiny formúl sú navzájom disjunktné.

Splniteľné formuly sa delia ešte na disjunktné podmnožiny s nasledujúcimi vlastnosťami:

formuly splniteľné len na hodnoty **pravda a polpravda**

formuly splniteľné len na hodnoty **pravda a nepravda**

formuly splniteľné len na hodnoty **polpravda a nepravda**

formuly splniteľné na **všetky tri hodnoty**.

Garantmi existencie týchto množín funktorov sú jednotlivé matice a definičné kalkuly, ktoré sme vytvorili pre všetky jednotlivé matice.

Definičný kalkul tiež jednoznačne určuje možnosti použitia konkrétnych deduktívnych foriem pre jednotlivé príbuzné kalkuly daného definičného kalkulu. Niektoré z príbuzných kalkuloľ môžu byť aj prázdne, ako sme to videli už v dvojhodnotovej logike. Trojhodnotová logika ako vieme môže pre každý definičný kalkul, či pre každú maticu tri príbuzné kalkuly.

Môžeme totiž vytvoriť odvodzovacie pravidlá pre ľubovoľnú maticu aj bez vytvorenia definičného kalkulu, ale naše informácie o vytváranom kalkule budú príliš chudobné na to, aby sme vedeli dostatočne presne, čo môžeme od dedukovania v takom kalkule očakávať. Každá matica, so svojim definičným kalkulom nám takéto úplné informácie poskytuje. V extenzionálnych výrokových logických kalkuloľ môžeme proces vytvárania definičných kalkuloľ pre jednotlivé

matice zveriť počítaču, tak ako sme to robili my. Potom zistíme, že deduktívne vlastnosti kalkulo sú dané definičným kalkulom každej matice.

Aj v trojhodnotovej a každej viachodnotovej logike máme vytvorený jednoznačný algoritmus na konštrukciu základných odvodzovacích pravidiel na tvorbu analytických tabiel v úplnom tvare a tým aj návod na tvorbu dôkazov pomocou počítača. Je to vlastne len rozšírenie algoritmu pre dvojhodnotového kalkulu.

Vráťme sa teraz vlastnostiam formúl kalkulo výrokovkej logiky. Z tabuľkových grafov nám jasne vyplýva, že základné delenie formúl môžeme previesť tak, že jenu množinu formúl tvorí zjednotenie jednotlivých množín tautológií a druhú množinu zjednotenie množín jednotlivých množín splniteľných formúl výrokovkej logiky. V princípe sa nám teda množina všetkých formúl výrokovkej logiky, bez ohľadu na to s akým počtom pravdivostných hodnôt v danej logike pracujeme, na dve disjunktné množiny

a. tautológie

b. splniteľné formuly.

V dvojhodnotovej logike je to jednoduché vzhľadom na malý počet definícií v jednotlivých definičných kalkuloch.

V troj a viachodnotových logikách je to zložitejšie vzhľadom na veľký počet definícií, ale aj na ich rozsiahlosť. Veď už v trojhodnotovej logike počet znakov v jednotlivých definíciách môže bežne dosiahnuť počet až dvadsaťtisíc aj viac znakov. To sú také rozsiahle formuly, že je veľmi problematické ich nielen napísať, ale hlavne skontrolovať ich správnosť. Každú definovanú maticu totiž generujeme len pomocou bazálnej matice kalkulu.

Tu musíme mať istotu v správnosti programu, ktorý matice generuje, samotnú podobu definície nevidíme, tá je zapísaná len v počítači a dá sa určitými procedúrami aj nájsť jej konkrétna podoba, ale my dostávame výsledok len v podobe definovanej matice. Táto matica je kvôli jednoduchšiemu zapisovaniu podávaná vo forme riadku, ktorý má toľko symbolov pre pravdivostné hodnoty, koľko je polí vo vnútri príslušnej matice. Tento zápis vo forme riadkov napr. vo trojhodnotovej logike zapíšeme do podoby matice takto.

Máme výsledný zápis vo podobe **112223123**. Pri tomto spôsobe zápisu sa nevyskytujú hodnoty označenia matice. Pri prepise do maticovej podoby vytvoríme označenú trojhodnotovú maticu a do jej polí zapíšeme hodnoty z riadka takto. Prvé tri znaky riadka zapíšeme do prvých troch polí, druhé do ďalších troch polí a posledné tri do posledných troch polí matrice. Znaky na prvom, piatom a deviatom mieste predstavujú diagonálu matice. Jej funkcia je podstatná pri vytváraní definičných kalkulo logiky, ale aj pri deduktívnych prístupoch ako to uvedieme šalej.

Maticová podoba zápisu funkto je nasledovná:

$$\Delta$$

p\q	1	2	3
1	1	1	2
2	2	2	3
3	1	2	3

Najprv vymedzíme presnejšie pojem definičnej sily v definičnom kalkule a to tak že zavedieme dve definície.

Definičná sila matice označuje počet dvojargumentových matíc, ktoré sú definovateľné touto maticou

Definičná mohutnosť matice určuje počet všetkých matíc v danom definičnom kalkule. *

Matica, ktorú sme práve vytvorili patrí podľa svojej diagonály do podskupiny 729 beznegačných definičných kalkulov, lebo má prirodzené usporiadanie pravdivostných hodnôt na diagonále. Ak vlastnime CD –nosič so všetkými definíciami trojhodnotovej logiky, ktorý je priložený k našej monografii, jednoduchým postupom zistíme, že táto naša matica má definičnú mohutnosť 24, čo je pomerne málo, lebo matice tejto podskupiny môžu mať definičnú mohutnosť až 729. Matica umožňuje vytvorenie odvodzovacích pravidiel pre všetky tri pravdivostné hodnoty. Tu je ich podoba.

T(AΔB)			P(AΔB)				F(AΔB)	
TA	TA	FA	TA	PA	PA	FA	PA	FA
TB	PB	TB	FB	TB	PB	PB	FB	FB

Formulami tohto kalkulu sú:

- samostatné výrokové premenné
- ak A aj B sú formuly, potom $A\Delta B$ je formula.
- Žiaden iný výra nie je formula.

Ďalšie formuly môžeme zaviesť pomocou definičného nahradenia tak, že definovaným maticiam kalkulu priradíme ako mená nejaké symboly.

Jednoargumentový funktor toho kalkulu je len **jednomiestna asercia**.

Pomocou vytvorených pravidiel môžeme vytvoriť tri príbuzné logické kalkuly s charakteristickými hodnotami:

pravda
polpravda
nepravda.

V žiadnom z týchto kalkulov sa nedajú formulovať tautológie, preto všetky tably v týchto kalkuloch budú otvorené. Všetky formuly majú teda základnú vlastnosť, že sú splniteľnými formulami a preto môžeme ich počet zmnožovať používaním pravidla substitúcie, lebo ľubovoľná formula aj po substitúcii ľubovoľnej formuly tohto kalkulu ostane splniteľnou formulou.

Popísané vlastnosti prináležia všetkým formulám v každom zo 729 kalkulov ktoré patria k beznegačným kalkulom.

Tieto vlastnosti, neschopnosť definovať vybranú maticu, prislúchajú aj všetkým kalkulom podskupiny kalkulov so slabými negáciami, preto vo všetkých definičných kalkuloch tohto podsystému (skupiny) sa dajú vytvárať len splniteľné formuly.

Negácia je v trojhodnotovej logike slabá, ak mení len jednu pravdivostnú hodnotu výroku.

Medzi kalkuly so slabou negáciou patria podpodsystémy definičných kalkulov so základnými diagonálami matic 113, 121, 122, 133, 223, 323. Ich maximálna definičná sila je 2187 dvojargumentových funktorov, 3 jednoargumentové funktory. Maximálna definičná mohutnosť je preto 2191 funktorov..

Ak si vyberieme ako bazálnu takú maticu, ktorá oproti predchádzajúcej matici bude mať **dve zmeny** na diagonále, potom táto matica sa stáva súčasťou podskupiny matic s **dobrou negáciou**, presnejšie je bazálnou maticou s hodnotami 321 na diagonále. Jej riadkový zápis je: 312223121. Jej funktor označíme symbolom „▲“ matica má podobu.

▲

p\q	1	2	3
1	3	1	2
2	2	2	3
3	1	2	1

Matica má DS = 6560 dvojargumentových matíc, 9 jednoargumentových matíc + bazálna matica.

Definičná mohutnosť jej definičného kalkulu je teda 6570. Ide preto o maximálnu maticu z tejto skupiny matíc.

Negácia je dobrá, ak mení dve hodnoty výroku.

Kalkul, ktorého bazálna negácia je dobrá, môže definovať jednu vybranú maticu.

Táto definícia nám naznačuje, že v kalkule, ktorý definuje jednu vybranú maticu, môžu existovať pre túto vybranú maticu tautologické formuly.

V trojhodnotovej logike existujú tri druhy dobrých negácií, podľa hodnôt, ktoré sa vyskytujú na diagonále bazálnej matice.

Prvú skupinu tvoria matice, v ktorých sa na diagonále vyskytujú tri hodnoty, ale jedna z nich je na svojom prirodzenom mieste. To je prípad našej matice. V takom prípade sa môže definovať vybraná matica pre hodnotu, ktorá má prirodzenú polohu. V podpodskupine týchto definičných kalkuloov však nie je definovateľná vybraná v každom z nich. (Ide o kalkuly s diagonálami 132, 213, 321, kde v prvom prípade pôjde o možnosť výskytu V-tautológií, v druhom prípade o výskyt F-tautológií a v treťom prípade o výskyt P-tautológií.)

Matice s nižšími DS väčšinou nedefinujú vybranú maticu.

Druhú skupinu tvoria matice, v ktorých sa na diagonále vyskytuje len jedna hodnota, teda matice s diagonálami: 111, 222, 333. V každom definičnom kalkule sa dá definovať vybraná matica a to pre hodnotu, ktorá sa vyskytuje na diagonále. Celková DS týchto kalkuloov sa preto oproti predchádzajúcej skupine mierne zvyšuje.

Tretiu skupinu tvoria matice, v ktorých sa tiež menia dve hodnoty na diagonále bazálnej matice, ale vyskytujú sa na nej len dve hodnoty. To značí že jedna hodnota sa vyskytuje dvakrát. A na hodnotu, ktorá sa vyskytuje dvakrát, sa dajú definovať príslušné vybrané matice v každom definičnom kalkule. To sa odrazí aj na ďalšom zvýšení celkovej DS týchto matíc. Pôjde o diagonály s hodnotami: 112, 121, 223, 322, 113, 313. V každom z definičných kalkuloov podpodskupín 112, 121 bude definovaná matica s hodnotami 111111111. V každom z definičných kalkuloov podpodskupín 223, 322 bude definovaná matica s hodnotami 222222222. V každom z definičných kalkuloov podpodskupín 113, 313 bude definovaná matica s hodnotami 333333333.

Vráťme sa teraz k vyššie uvedenej matici. Patrí k maximálnym maticiam tejto podskupiny matíc, lebo v tejto skupine sa matice s vyššou DS nevyskytujú. Podľa toho čo sme vyslovili vyššie vieme, že je v nej definovaná vybraná matica 222222222 a preto sa v tomto kalkule dajú formulovať P-tautológie. Jej pravidlá pre konštrukciu analytických tabiel majú tvar:

T(A▲ B)			P(A▲ B)				F(A▲ B)	
TA	FA	FA	TA	PA	PA	FA	TA	FA
PB	TB	FB	FB	PB	PB	PB	TB	FB

Aj pomocou týchto združených pravidiel, ako pri každej matici trojhodnotovej logiky môžeme vytvárať tri príbuzné logické kalkuly s tým, že ich vlastnosti sa však zmenia.

Pri vytváraní matíc označením počiatocné formuly $T(A \blacktriangle B)$ a $F(A \blacktriangle B)$ môžeme dospieť k situácii, že obe vytvorené tably budú uzavreté, čím dospejeme k záveru, že skúmaná formula je P-tautológiou. Pri označeníach začiatocných formúl pre vytvorenie tabiel $T(A \blacktriangle B)$ a $P(A \blacktriangle B)$, alebo pri označeníach $P(A \blacktriangle B)$ a $F(A \blacktriangle B)$ budú tably vždy otvorené. Je to prirodzené, lebo logický kalkul s charakteristickou hodnotou polpravda pre uvedenú maticu umožňuje konštruovať P-tautológie, ale neumožňuje konštruovať T-tautológie a F-tautológie. Logické kalkuly s charakteristickou hodnotou pravda alebo nepravda nevytvárajú žiadne tautológie.

V kalkuloch, ktoré konštruujeme z matíc, ktoré definujú aspoň jednu vybranú maticu, musíme spresniť podmienky používania pravidla substitúcie. **Pravidlo** môžeme **substitúcie** používať len v tautológiách, a ako substitúcie môžeme používať všetky formuly daného kalkulu. **Lebo len u tautológií sa zachováva ich dedičná vlastnosť, že totiž aj po substitúcii ostávajú tautológiami. Substitúcia v takých kalkuloch totiž môže zmeniť splniteľnú formulu na tautológiu a dedičná vlastnosť, „byť splniteľnou formulou“ by sa nezachovala.** Toto obmedzenie platí samozrejme pre všetky logické kalkuly, v ktorých definičných kalkuloch je definovaná aspoň jedna vybraná matica.

Tretou maticou, ktorou sa budeme zaoberať je matica s ďalším variantom diagonály na našej pôvodnej matici. Nová matica má riadkový zápis 312213122. Samotná matica má podobu a priradíme jej symbol „■“:

■

p\q	1	2	3
1	3	1	2
2	2	1	3
3	1	2	2

Podľa umiestneniu v systéme definícií na našom CD-nosiči je matica shefferovská a má preto maximálnu definičnú mohutnosť. Vzhľadom na rozmiestnenie hodnôt na diagonále, bazálna negácia ktorá je ňou určená je dokonalou negáciou, lebo obsahuje tri rôzne hodnoty a žiadna hodnota nie na svojom prirodzenom mieste.

Odvodzovacie deduktívne pravidlá na konštrukciu analytických tabiel sú určené rozmiestnením hodnôt vo vnútri matice a majú tvar:

T(A ■ B)			P(A ■ B)				F(A ■ B)	
TA	PA	FA	TA	PA	FA	FA	TA	PA
PB	PB	TB	TB	TB	PB	FB	TB	FB

Pretože je skúmaná matica shefferovská, vo všetkých jej troch príbuzných kalkuloch bude možné vytvárať tautologické formuly.

Každá formula, ktorá vytvorí uzavretú tablu pri označení $P(A \blacksquare B)$ aj pri označení $F(A \blacksquare B)$ bude **V-tautologická**.

Každá formula, ktorá vytvorí uzavretú tablu pri označení $T(A \blacksquare B)$ aj pri označení $F(A \blacksquare B)$ bude **P-tautologická**.

Každá formula, ktorá vytvorí uzavretú tablu pri označení $T(A \blacksquare B)$ aj pri označení $P(A \blacksquare B)$ bude **F-tautologická**.

Takým postupom vytvoríme tri príbuzné úplné deduktívne kalkuly.

Prvý s charakteristickou hodnotou **pravda**, druhý s charakteristickou hodnotou **polpravda** a tretí s charakteristickou hodnotou **nepravda**.

V podsysteme kalkulov s dokonalými negáciami sa vyskytujú dva podpodsystemy. Prvý s diagonálou **231** a druhý diagonálou **312**, do ktorého patrí aj nami uvedená matica, ktorá ako sme uviedli má shefferovské vlastnosti, lebo je definičná mohutnosť je 19710 funktorov. To sme zistili v jej definičnom kalkule. Definičná sila matice pre dvojargumentové funktoary je $19682 +$ bazálna matica. Vieme, že v týchto maticiach sa nachádza 27 rôznych diagonál a to je počet všetkých jednoargumentových funktorov. Jednotlivé diagonály sa samozrejme opakujú viackrát v rôznych maticiach. Podľa usporiadania definičných kalkulov vieme, že nie všetky matice s dokonalými negáciami sú shefferovské. Matice, ktoré nie sú shefferovské sú neúplné preto aj kalkuly, ktoré sú nimi vytvárané sú neúplné.

Neúplných matíc je v oboch podpodsystemoch po 18. Tieto sa ale delia na **dve veľmi rozdielne podskupiny**.

Prvá skupina je veľmi blízka úplným kalkulom. Líši sa od nich len málo nižšou DS o jednu, dve alebo tri matice. Nazvali sme ich podmaximálne matice a je ich v každej z dvoch podpodskupín deväť. Definujú klasickú konjunkciu, disjunkciu aj dokonalú negáciu, ale nie sú úplné. Spolu je to 18 podmaximálnych matíc a vytvárajú podmaximálne definičné kalkuly.

Druhá skupina, v monografii sme ju nazvali **neproduktívne matice** a pod takým menom je uvedená aj na priloženom CD-nosiči, obsahuje v oboch podpodsystemoch po deväť definičných kalkulov. DS bazálnych matíc je veľmi nízka a pohybuje sa od $DS = 5$ dvojargumentových, $+ 3$ jednoargumentové $+ 3$ bazálna matica, teda ich definičná mohutnosť je 9 a to u dvoch matíc, jedna matica s $DS = 5$ matíc, ktoré vytvárajú $8 + 3$ jednoargumentové $+ 3$ bazálna matica, čo dáva def. mohutnosť = 12. Nasleduje 6 matíc s $DS = 26 + 3 + 3$ bazálna, teda def. mohutnosť = 30.

Až po odovzdaní našej monografie do tlače sme našli nové fakty o nami popisovaných štruktúrach v logike, ktoré sa týkajú aj týchto definičných kalkulov. Zistili sme že je to celkom prirodzený jav. Ide o 9 **neaserčných kalkulov** trojhodnotovej logiky, ktoré pomocou iných druhov matíc ani nie je možné konštruovať iným spôsobom. Vedeli sme síce, že neaserčné kalkuly v dvojhodnotovej logike sa dajú definovať pomocou jedinej matice len shefferovskými funktoarmi, ale tam sme na vytváranie definičných kalkulov nepoužívali program generovania matíc. Až v trojhodnotovej logike, kde sme jednotlivé matice vytvárali pomocou programu, sa v skupine kalkulov, kde sme očakávali hlavne shefferovské matice objavili definičné kalkuly s nízkymi DS a bez možnosti vytvárať tautológie.

Teraz už vieme, že v každej logike sa musia vyskytovať neaserčné kalkuly, a sú definovateľné len maticami, ktoré definujú dokonalú maticu (neaserčné, shefferovské). V dvojhodnotovej logike to boli dva neaserčné matice, ktoré mali svoje definičné kalkuly. V trojhodnotovej logike je to teda 9 neaserčných kalkulov, kde bazálne matice sa navzájom definujú, vytvárajú preto kvazitolerancie kalkulov s rovnakými DS. Definujú tiež príslušné asercie príslušnej logiky. Veľmi hlboko sa svojim čitateľom ospravedľujeme našim čitateľom za tento nedostatok v našej monografii. Jedine **neasercie** totiž ako matice, ktoré nedefinujú žiadnu vybranú maticu, ale **definujú všetky dokonalé negácie**.

J. Słupecki dokázal, že dokonalá negácia a klasická konjunkcia zaučujú vytvorenie funkčne úplného kalkulu ľubovoľnej viachodnotovej logike. Tento dôkaz predpokladá prijať príslušnú, ale dokonalú negáciu a konjunkciu, ako základné termíny vytváraného kalkulu. Prijať negáciu ako základný termín však predpokladá brať ju ako definovaný termín niektorého definičného kalkulu z podpodskupiny systémov s diagonálami 231 alebo 312. My totiž vieme, že všetky jednoargumentové funktoary sú definované. Brať ich ako základné, znamená narušiť princíp Ochamovej britvy o zmnožovaní pojmov, ako jedného z dôležitých princípov pri vytváraní vedeckých systémov.

Ak teda nechceme zbytočne zmnožovať pojmy, potom musíme zabráť dve nezávislé matice ako primitívne termíny. Túto podmienku ale spĺňajú len neasertívne matice. Len aserčné definičné kalkuly spolu s klasickou konjunkciou môžu tvoriť nezávislé matice na vytvorenie funkčne úplného kalkulu. Tieto matice však predstavujú len 0,04% z matic podpodsystemu s definičných kalkulov pri základnej matici s diagonálou 231 alebo 312. Podpodsystemy s uvedenými diagonálami tvoria podsystem s dokonalými negáciami. Obsahujú spolu $2 \times 19683 = 39366$ definičných kalkulov. Z nich 18 aserčných kalkulov predstavuje len 0,00046% všetkých definičných kalkulov. Je veľmi malá pravdepodobnosť, že by mal na mysli práve niektorý z nich, lebo predpokladáme, že tom čase neboli známe všetky definičné kalkuly, ktoré sme vytvorili my.

Ostatné definičné kalkuly založené na použití tohto druhu matic predstavujú všetko matice v ktorých je konjunkcia definovaná, je preto definovaným pojmom. Okrem toho je potrebné si uvedomiť, že konjunkcia a dokonalá negácia je definovateľná aj v podmaximálnych definičných kalkuloch.

Tieto poznatky nenegujú výsledok dôkazu **J. Slupeckého**, len poukazujú na to, že správnosť takého dôkazu vôbec nevystihuje obsahové bohatstvo logiky a neumožňuje nám ani predpokladať množstvo výskytov shefferovských matic.

Aserčné kalkuly sa nám objavili automaticky pri generovaní definícií, lebo program, ktorý sme používali mal **jednu variantu** naprogramovanú tak, že stačilo zadať najnižšiu trojhodnotovú maticu s príslušnou diagonálou a postupne vygeneroval všetky matice až po najvyššiu. Využila sa postupnosť na základe zvyšovania hodnoty v trojkovej sústave. Ak sme napr. zadali maticu v zápise 311111112, program vygeneroval 729 definičných kalkulov tejto podskupiny a skončil najvyššou maticou 3333133312. Usporiadáním podľa definičných síl sme potom vytriedili aserčné a podmaximálne matice. Ostatných 711 matic malo shefferovské vlastnosti. Podobne sa prevádzali definície pre ostatné diagonály. Práve objavenie neaserčných definičných kalkulov nám potvrdzovalo spoľahlivosť používaného programu na generovanie matic.

Musíme okomentovať tento program podrobnejšie. Máme ho vytvorený v dvoch variantoch.

Prvý variant vychádza z matice, ktorá predstavuje najnižšie a popísali sme ho vyššie.

Druhý variant vytvorí jeden definičný kalkul z ľubovoľnej matice. Jeho výhodou je to, že nám overuje v kratšom čase nejaký konkrétny definičný kalkul.

Chceme ešte podotknúť, že **klasická konjunkcia a disjunkcia** nie sú definovateľné v mnohých podpodsystemoch trojhodnotovej logiky a dokonalé negácie, sú buď diagonálami bazálnych matic, alebo sú definovateľné v podpodsystemoch so silnými negáciami, ako si ukážeme nižšie. Preto definícia konjunkcie a disjunkcie, bez možnosti definovať dokonalú negáciu nezvyšujú podstatne DS matic.

Ďalej je potrebné si uvedomiť, že **zavedením nejakého jednoargumentového funkтора do kalkulu, v ktorom nie je definovaný, zavádzame vlastne celú novú dvojargumentovú nedefinovanú maticu z iného kalkulu, kde ona môže byť bazálnou maticou. a to so všetkými dôsledkami. Jednoargumentové funkторы sú definičnými dôsledkami dvojargumentových funkторов, nie ich iniciátormi.** Definovaný termín akosi ťahá so sebou pri svojom používaní aj vlastnosti základného termínu, pomocou ktorého bol definovaný.

Vôbec nepopierame, že vytváranie logických kalkulov nie je dostatočne presné a možné na základe určitého, voliteľného počtu základných termínov, vidíme v tom však zbytočné porušovanie Ochamovej britvy, ale zároveň aj zbytočné ochudobňovanie nášho poznávania zákonitostí rozvíjania logických štruktúr. Len vytvorenie všetkých možných kalkulov výrokovej logiky ukáže bohatstvo jej pojmov a možností jej použitia. Maticová logika je školou pochopenia generovania jazykových štruktúr a možno aj všetkých štruktúr.

Štvorhodnotová logika

Napriek tomu, že nemáme vypracovaný žiaden program na generovanie matíc vo štvorhodnotovej logike, chceli by sme poukázať na nám známe skutočnosti o dôsledkoch malých štruktúrálnych zmien na diagonále na vytváranie logických kalkulo a možnosti prevádzania deduktívnych postupoch v tejto oblasti.

Uvedieme matice pre vytvorenie štvorhodnotového logického kalkulu, ktoré budú patriť do rôznych podsystemov štvorhodnotovej logiky a z ktorých každá vytvorí jeden podpodsystem definičných kalkulo tejto logiky.

Prvá z týchto matíc, ktorej funktor označíme symbolom „ O_4 “ bude mať tvar:

$p \setminus q$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	1	1
3	1	1	3	1
4	1	1	1	4

Nevieme presne určiť jej definičnú silu ani definičnú mohutnosť, ale s určitosťou môžeme tvrdiť, že jej DS bude veľmi nízka. No o priebehu a dosiahnutých výsledkoch vieme naznačiť niečo z úplnou jasnosťou.

Definičný kalkul tejto matice bude prvý z dlhého radu 4^8 matíc, čo predstavuje jeden podpodsystemov štvorhodnotovej logiky. Maximálne DS týchto beznegačných kalkulo bude $(4^8 - 1)$ pre dvojargumentové matice – funkto. Jednoargumentových funkto bude v týchto kalkulo maximálne 4.

Bude nasledovať ďalších 255 podpodsystemov s rôznymi tipmi diagonál, ktoré fakticky určujú prirodzené negácie pre vytvárané kalkuly s jednou dvomi, tromi a štyrmi zmenami na diagonálach až po možnosť vytvorenia dokonalej negácie. V poslednej skupine s diagonálami, ktoré definujú dokonale negácie, však budú maximálne definičné sily predstavovať u absolútnej väčšiny matíc dvojargumentových matíc hodnoty $(4^{16} - 1)$ a pre jednoargumentové matice to bude hodnota **DS = 256**. Nutne sa však v týchto podpodsystemoch vyskytne skupina 16 neaserčných matíc, v ktorých sa DS budú pohybovať v rozmedzí hodnôt DS od 8 po 256 pre dvojargumentové aserčné matice a hodnoty maximálne 4 pre jednoargumentové matice. Malo by sa tam vyskytovať aj 16 podmaximálnych matíc, kde sa DS budú od maximálnych líšiť hodnotu DS nižšou o 1, 2, 3 a 4 matice pri dvojargumentových maticiach.

Vo štvorhodnotovej logike sa však objavuje ďalší fenomén, že nie všetky diagonály, na ktorých sú na štyri zmeny oproti ich prirodzenému usporiadaniu sú dokonalé. Diagonály so štyrmi rôznymi hodnotami už samé začínajú nejakým spôsobom štrukturalizovať. Preto diagonály: 2341, 2413, 3142, 3421, 4132 a 4312 sú dokonalé a vytvárajú dokonalé negácie, ale diagonály: 2143, 3412 a 4321 sú nedokonalé a preto vytvárajú obmedzené negácie..

Zatiaľ nevieme aké vlastnosti budú mať silné negácie, to značí negácie so štyrmi zmenami na diagonále, ale s výskytmi len troch hodnôt napr. 2131, 2132, 2331, 2311, 3122, 3211

Maximálna DS matíc, ktoré definujú aspoň jednu vybranú maticu bude 1,073,741.824. To značí jedna štvrtina DS shefferovských matíc a 64 jednoargumentových matíc s hodnotami, ktoré budú závislé na príslušnej definovanej vybranej matici.

Na tieto otázky a na mnohé ďalšie, hlavne tie ktoré sú špecifické pre štvorhodnotovú logiku dostaneme odpoveď až vtedy, keď sa nám podarí nájsť programátora, ktorý by rozšíril program generovania matíc v štvorhodnotovej logike.

Záver.

Stať, ktorú sme uviedli je potrebné chápať ako ďalšie rozvinutie našich úvah o maticovej logike. Je svojim obsahom rozšírením našej monografie „**Maticová logika**“. Aj keď sme sa snažili napísať túto stať ako samostatný celok, pre jej lepšie pochopenie je užitočné mať našu monografiu k dispozícii aspoň k nahliadnutiu. Ak však čitateľ pochopí obsah tejto práce aj ako samostatný celok, budeme to považovať za náš úspech a predpokladáme, že sa aj tak dá zvieŕť na prečítanie „Maticovej logiky“.

Za najdôležitejšie považujeme v tejto stati uvedenie pojmu „**úplnej podoby odvodzovacích pravidiel**“, lebo ony sú kľúčom k možnosti zavedenia algoritmu pre tvorbu deduktívnych dôkazov formou vytvárania analytických tabiel v maticovej logike.

Myslíme si tiež, že sme dostatočne zdôraznili aj význam označených matíc pri výstavbe extenzionálnej logiky s akýmkoľvek počtom pravdivostných hodnôt, ako sme to vymedzili už v monografii.

Zavedením modality platíme za **našu nerozhodnosť**. Musíme vybrať z nedostatočne poznaných faktov alebo procesov, pritom vieme že po výbere sa daný fakt stane nutnosťou. Modálne postupy nám majú umožniť vybrať najvhodnejšiu modalitu za nutnosť.

Nerozhodnuteľnosť nášho jazyka je dôsledkom nutnosti používania zovšeobecňovania vo vedeckých postupoch. Inakšie by sme nemohli formulovať zákony. Aristoteles mal zrejme pravdu ak tvrdil, že proces zovšeobecňovania je výsledkom induktívnych procesov. Výsledky indukcie však prinášajú v prevažnej časti svojich záverov pravdepodobnostné hodnoty. My ich však používame ako platné.

Do sveta našej nerozhodnosti a do sveta nerozhodnuteľnosti nami používaného jazyka vstupuje logika a pomocou svojich matíc nám umožňuje pochopiť celú zložitosť vzťahov medzi človekom a jazykom medzi jazykom a prírodou a tým sprostredkovane aj medzi človekom a prírodou. Bez jazyka by sme nepoznali podstatu prírody – sveta v ktorom žijeme. Logika práve prostredníctvom matíc ukazuje na tom, aké obrovské možnosti využitia jazyka sa nám ponúkajú. Matice sú štruktúrované banky informácie o tom, ako môžeme budovať gramatikou kodifikovaný jazyk pomocou pravidiel logiky a ňou umožňovanou dedukciou. Možnosti dedukcie sú však určené definíčnými možnosťami matíc. Definície sú preto mostom od slovníka k dedukovaniu, od konštatácie k predvídaní. Mať poriadok v pojmoch značí, môcť začať dedukovať. Množstvo prostriedkov, ktoré nám logika ponúka, prekračuje pojmové možnosti jazyka. Pevne veríme, že štruktúry matíc poskytnú aj iné možné využitia ako len v logike, lebo taký dokonalý a stabilný nástroj je príliš všeobecný na to, aby bol používaný len v jednom procese.

V Spišskej Belej, august 2004.

F. Siska

**Poznámka:*

Definičná mohutnosť kalkulu je teda určená hodnotou $\text{definičnej sily} + 1$ bazálna matica + počet jednomiestnych definovaných funktorov toho kalkulu. Počet jednomiestnych definovaných funktorov sa pohybuje od hodnoty 1 až po 27 podľa vlastností kalkulu. V shefferovských kalkuloch to teda bude hodnota 19682 definovaných dvojargumentových matíc + 1 bazálna matica + 27

definovaných jednorargumentových funktorov, teda spolu 19710. počet definovaných jednomiestnych funktorov je daný počtom rôznych diagonál v definovaných maticiach + diagonála bazálnej matice. *Všetky jednoargumentové funktoory sú preto v maticovej logike definovanými termínmi.* Tým sa vyhneme nepresnostiam, ktoré sa mohli vyskytnúť v našej monografii, kde sme používali len pojem definičnej sily v oboch významoch, a len sme zdôrazňovali, že „aj vrátane s bazálnou maticou a počtom jednomiestnych funktorov“ a tento dodatok sa možno v texte nevyskytuje všade, kde by sa vyskytovať mal.

Čitateľ nájde definície jednomiestnych funktorov pre symetrické matice trojhodnotovej logiky na CD priloženom v monografii „Maticová logika“ pod názvom „Malé“.

Literatúra:

Siska F.: Maticová logika, IRIS, Bratislava 2004.

Smullyan R. M.: Logika prvého rádu, Alfa, Bratislava, 1979.